Matemáticas I: Hoja 1

1. Números complejos

Hasta ahora, hemos visto que los números reales son aquellos que poseen una expresión decimal y que podemos representar en una recta infinita. No obstante, para realizar ciertos cálculos es preciso usar un conjunto más amplio de números: los *números complejos*.

Ejemplo 1.1 *Consideremos la siguiente ecuación:*

$$x^2 + 1 = 0$$

Aplicamos la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, donde en este caso $a = 1, b = 0, c = 1$ que dice que las dos soluciones de la ecuación vienen dadas por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo los valores anteriormente mencionados, tenemos que:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \equiv \pm i$$

donde definiremos $i = \sqrt{-1}$ como la *unidad imaginaria*. Es importante ver que operaremos con la i como si fuera una variable estandar y además satisface la relación $i^2 = -1$. Es evidente entonces que $i^4 = 1$. Representaremos el conjunto de los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \text{ números reales}\}$$

Notemos que los números reales están contenidos en el conjunto de los números complejos (son los que tienen $b = 0$). Vamos a ver ahora el tipo de operaciones que podemos definir sobre este conjunto de números. Si $z = a + bi$, $w = c + di$:

1. $0 = 0 + i \cdot 0$
2. $z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d) \cdot i$
3. $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$

Podemos deducir de estas propiedades que:

1. $z = w$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$

2. Dado un número real r, $r \cdot z = (ra) + (rb) \cdot i$

3. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

Dado un número complejo $z = a + bi$, hablaremos de su *parte real* $\Re(z) = a$ y de su *parte imaginaria* $\Im(z) = b$. Tambien definimos su *complejo conjugado* $\overline{z} \equiv a - bi$. Se puede comprobar que $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = a$, $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = b$. Por último, definiremos el *módulo* de un número complejo $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ y su argumento $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$. A partir de esta definición se obtiene que $a = |z|\cos(\arg(z))$, $b = |z|\sin(\arg(z))$. Cuando en lugar de identificar un complejo por (a, b), lo identificamos por $(|z|, \arg(z))$, diremos que estamos usando la *forma polar*.

Otra manera de ver a los números complejos es como un "plano", donde el eje horizontal es la recta real.

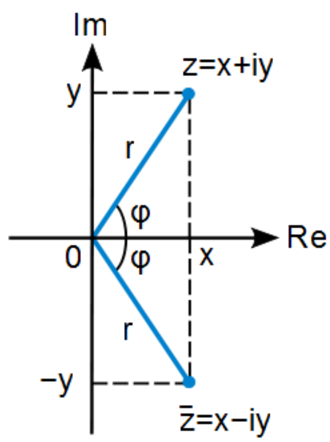

Figura 1: Plano complejo, notaciones polar y cartesiana. z y $\overline{z}$

Ejercicio 1.2 *Escribir los siguientes números complejos en notación polar y en coordenadas cartesianas:*

1. $a = 0, b = 3$

2. $a = -0{,}3, b = 0{,}3$

3. $a = -2, b = 0$

4. $r = 1, \theta = \pi$

5. $r = 0{,}1, \theta = \pi/4$

Solución:

1. $r = 3, \theta = \pi/2$
2. $r = \sqrt{(0{,}3)^2 + (0{,}3)^2}, \theta = 3\pi/4$
3. $r = 2, \theta = \pi$
4. $a = -1, b = 0$
5. $a = 0{,}1\sqrt{2}/2, b = 0{,}1\sqrt{2}/2$

□

Ejercicio 1.3 *Demuestra usando la definición del producto que si* $w = z_1 \cdot z_2$ *y* $|z_i| = r_i$, $arg(z_i) = \theta_i$, *entonces:*

$$|w| = r_1 r_2, \quad arg(w) = \theta_1 + \theta_2$$

Solución: En coordenadas cartesianas tenemos que $z_i = r_i \cos(\theta_i) + r_i \sin(\theta_i) i$. Ahora, multiplicamos:

$$\begin{aligned}
&(r_1 \cos(\theta_1) + r_1 \sin(\theta_1) i)(r_2 \cos(\theta_2) + r_2 \sin(\theta_2) i) \\
&= r_1 r_2 \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + i r_1 r_2 \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + i r_1 r_2 \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - r_1 r_2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\
&= r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + i r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.4 *Calcular las soluciones de la siguiente ecuación:*

$$x^4 - x^2 - 1 = 0$$

Solución: Comenzamos haciendo el cambio $w = x^2$. Una vez tengamos las soluciones w, entonces las soluciones en x vendrán dadas por $\pm\sqrt{w}$. Haciendo el cambio, la ecuación a resolver queda como:

$$w^2 - w - 1 = 0$$

Ahora, aplicamos la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado genéricas $ax^2 + bx + c = 0$. En nuestro caso, $a = 1, b = -1, c = -1$:

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Por último, despejamos las soluciones en x para obtener:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

□

Ejercicio 1.5 *Calcular las soluciones de la siguiente ecuación:*

$$x^3 + x^2 + 5x = 0$$

Solución: Comenzamos viendo que 0 es una solución puesto que podemos factorizar el lado izquierdo como:

$$x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 5)$$

Ahora sólo faltaría buscar soluciones de $x^2 + 5x + 1 = 0$. Vamos a ello. Usando la fórmula general como antes, tenemos que $a = 1, b = 1, c = 5$ y por tanto as soluciones son:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 5}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

□

2. El principio de Inducción

Una de las técnicas que usaremos para demostrar ciertos resultados se conoce como *principio de inducción*. El mecanismo utilizado por esta técnica consiste en ver que si una cierta proposición es cierta para un número n, también lo es para $n+1$, y razonar sucesivamente de la misma manera para cualquier número. Si inicialmente la proposición era cierta para $n = 1$, entonces es cierta para todos los números naturales. Formalmente, lo podemos resumir de la siguiente manera. Para demostrar una proposición P hace falta que:

- Paso 1.- La proposición P es verdadera para $n = 1$, o bien, $P(1)$ es verdadera.
- Paso 2.- (Hipótesis de Inducción) Se supone que $P(k)$ es verdadera, donde k es un número natural arbitrario.
- Paso 3.- (Tésis de Inducción) Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera, o bien, $P(k)$ verdadera $\Rightarrow P(k + 1)$ verdadera.

Lo podemos visualizar como un efecto dominó: la primera pieza cae porque la proposición es cierta para $k = 1$, esto implica que la proposición es cierta para $k = 2$, esto para $k = 3$... etc, o también con el popular dicho: "Donde comen 2, comen 3", "Donde comen 3, comen 4",... y así sucesivamente.

Además, existen dos variantes del principio de inducción. En el primer caso, únicamente somos capaces de demostrar la proposición a partir de un cierto número natural n_0 y el principio sería el siguiente:

Si $P(n)$ es verdadera para n_0 y si $P(m + 1)$ es verdadera para todo natural $m \geq n_0$ para la cual $P(m)$ es verdadera, entonces $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$.

La segunda variante se aplica de preferencia en el caso cuando $P(m + 1)$ no puede ser fácilmente deducible de $P(m)$, pero su validez depende de $P(k)$ para cualquier $k < m$. Si $P(1)$ es verdadera y si $P(m+1)$ es verdadera para todo $m \geq 1$ para la cual todas las proposiciones $P(1), P(2), P(3), \ldots P(m)$ son verdaderas, entonces $P(n)$ es verdadera para $n \geq 1$.

Ejemplo 2.1 *Demostrar por inducción que* $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *para todo* $n \geq 1$.

Demostración:

La proposición es verdadera para $n = 1$, puesto que $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Hipótesis de inducción: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para n.

Tesis de inducción: Asumimos la hipótesis de inducción. Ahora veamos que la proposición es cierta para $n + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + n + 1 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n + 1 \underset{H.I.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Esto demuestra que la proposición es cierta para $n + 1$ y la demostración concluye. $\square$

No obstante, se pueden hacer otro tipo de demostraciones. Comenzamos por una visual, sin palabras:

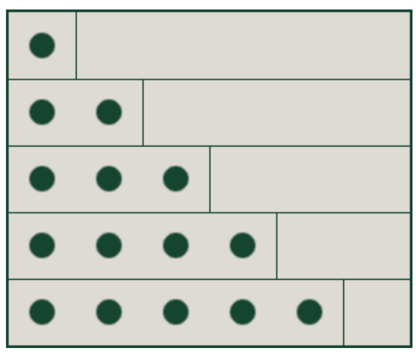

Figura 2: Demostración visual de $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$

Otra demostración consiste en lo siguiente. Si llamamos S a la suma que queremos calcular:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\
S & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

Tenemos que $2S = n(n+1)$ de donde se sigue el resultado que queríamos demostrar.

Ejercicio 2.2 *Utiliza la última técnica de demostración explicada para calcular el resultado de la serie geométrica de primer término* a *y razón* $r \neq 1$:

$$G = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

Solución:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} G & = & a & + & ar & + & \ldots & + & ar^{n-1} & + & ar^{n} & & \\ rG & = & & + & ar & + & \ldots & + & ar^{n-1} & + & ar^{n} & + & ar^{n+1} \\ \hline (1-r)G & = & a & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 0 & - & ar^{n+1} \end{array}$$

Tenemos por tanto que:

$$(1-r)G = a - ar^{n+1} \Rightarrow G = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}$$

□

Por último, vamos a ver un ejemplo de "demostración" por inducción. Es muy importante tener en cuenta que el resultado que se intenta demostrar es FALSO, por lo que esta no es una demostración válida, sino un ejemplo ilustrativo de dónde puede fallar una demostración por inducción. Se recomienda que saltéis esta demostración hasta haber hecho algunos de los ejercicios posteriores y estar familiarizados con la técnica.

Ejemplo 2.3 *Para todo $n \geq 1$, si a y b son enteros positivos con $\max\{a, b\} = n$ entonces $a = b$.*

Demostración: Inducción sobre n. El caso base es $n = 1$, pero si $\max\{a, b\} = 1$, entonces necesariamente $a = b = 1$. Supongamos la proposición cierta para n y veamos que lo es para $n + 1$. Asumiendo que $\max\{a, b\} = n + 1$, distinguimos dos casos:

- Caso 1: $a - 1 \geq b - 1$:

  Entonces $a \geq b$ y por tanto $a = \max\{a, b\} = n + 1$, lo que significa que $a - 1 = n$ y por tanto que $\max\{a - 1, b - 1\} = n$. Por hipótesis de inducción, $a - 1 = b - 1 = n$, lo que implica que $a = b = n + 1$.

- Caso 2: $a - 1 < b - 1$:

  Se razona exactamente igual que el anterior intercambiando el papel de a y b.

□

Nota 2.4 *¿Dónde está el error? En la demostración hemos usado la hipótesis de inducción para concluir que $\max\{a - 1, b - 1\} = n \Rightarrow a - 1 = b - 1$. Pero esta hipótesis únicamente la podemos usar si $a - 1$ y $b - 1$ son enteros positivos. Sin embargo, puede que este no sea el caso, si $b = 1$.*

Ejercicio 2.5 *Demostrar por inducción que $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ es divisible por 9 para todo $n \geq 0$.*

Solución:

- La proposición es verdadera para $n = 0$, puesto que $0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$, que es claramente divisible por 9.

- Hipótesis de inducción: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9 para n.
- Tesis de inducción: Asumimos la hipótesis de inducción. Ahora veamos que la proposición es cierta para $n+1$:

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = \underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{\text{múltiplo de 9 por la H.I}} + (n+3)^3 - n^3$$

$$(n+3)^3 - n^3 = n^3 + 3\cdot 3\cdot n^2 + 3\cdot 3^2\cdot n + 3^3 - n^3 = 3\cdot 3\cdot n^2 + 3\cdot 3^2\cdot n + 3^3 = 9(n^2+3n+3)$$

Esto demuestra que la proposición es cierta para $n+1$ y la demostración concluye.

□

Definición 2.6 *Se define el* factorial de un número n *o* n factorial *y se denota por* $n!$ *a la siguiente cantidad:*

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

Ejercicio 2.7 (Factorial) *Demostrar por inducción que* $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ *para todo* $n \geq 1$.

Solución: Definimos $S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$. Queremos probar que $S_n = (n+1)! - 1$. Observamos primero que para $n = 1$ se tiene que:

$$S_1 = 1\cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$$

Sea ahora nuestra hipótesis de inducción que la proposición se verifica para n. Veamos que se verifica también para $n+1$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)\cdot(n+1)! \underset{H.I.}{=} = (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! \\ &= (n+1)!\cdot(1+n+1) - 1 = (n+2)\cdot(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Ejercicio 2.8 *Demostrar por inducción que* $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)\cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$ *para todo* $n \geq 2$.

Solución: Llamando S_n al lado izquierdo de la ecuación, es fácil ver que $S_2 = 1\cdot 2 = 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$. Si nuestra hipótesis de inducción es que la ecuación se verifica para n, vamos a ver ahora que se verifica para $n+1$:

$$S_{n+1} = S_n + n\cdot n + 1 \underset{H.I.}{=} \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n\cdot(n+1) = n(n+1)\left(\frac{n-1}{3} + 1\right)$$

$$= n(n+1)\left(\frac{n+2}{3} + 1\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 2.9 *Demostrar por inducción que* $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \dfrac{n}{a(a+n)}$ *para todo* $n \geq 1$*, a real pero no entero no positivo.*

Solución: Llamando S_n al lado izquierdo de la ecuación, es fácil ver que $S_1 = \frac{1}{a(a+1)}$. Si nuestra hipótesis de inducción es que la ecuación se verifica para n, vamos a ver ahora que se verifica para $n+1$:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} \underset{H.I.}{=} \frac{n}{a(a+n)} + \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{n(a+n+1)+a}{a(a+n)(a+n+1)}$$

$$= \frac{(a+n)(n+1)}{a(a+n)(a+n+1)} = \frac{(n+1)}{a(a+n+1)}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 2.10 (*) *Demostrar por inducción que* $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ *es divisible por 133 para todo* $n \geq 0$*.*

Solución: Comenzamos reescribiendo la proposición de forma que lo que tenemos que demostrar es que $11^{n+2}+12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$ es divisible por 133. Observamos la siguiente identidad:

$$121 \cdot 11^{n+1} + 12 \cdot 144^{n+1} = (121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n)(133+11) - 133 \cdot (121 \cdot 11^n)$$

Por la hipótesis de inducción, el primer sumando es múltiplo de 133. El segundo es porque lleva un factor 133 multiplicando. Faltaría por último comprobar que l caso base se satisface. No obstante:

$$11^{0+2} + 12^{2\cdot 0+1} = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133$$

que es claramente divisible por 133. □